調和級数が 30 を超える地点

中嶋 慧

November 3, 2022

Abstract

調和級数が 30 を超える地点を、$e^{30-\gamma}$ の数値計算だけを使って求める (γ はオイラー定数)。結果は 6000022499693 である。この方法は数理的に面白い。

Contents

1 調和級数が H を超える地点

調和級数

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \tag{1.1}$$

と正の数 H に対して、

$$H_n \geq H, \quad H_{n-1} < H \tag{1.2}$$

を満たす n を $N(H)$ とする。また、オイラー・マクローリンの公式 (付録 A) より、

$$H_n = f(n) = \gamma + \ln n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \mathcal{O}(n^{-4}) \tag{1.3}$$

であるので、

$$f(n(H)) = H \tag{1.4}$$

とすると、

$$N(H) = \lceil n(H) \rceil \tag{1.5}$$

である。ここで、$\lceil \bullet \rceil$ は $\bullet$ 以上の最小の整数である。

$n(H)$ を誤差 δn で求めたとする。例えば $|\delta n| \leq 10^{-r}$(r は 5 とか) で、$n(H) =$ 整数 $+0.865\cdots$ となっていれば、今の目的には十分である。ところで、$n = n(H)$ 付近で $f(n)$ が誤差 δf のとき、

$$|\delta n| \sim \left|\frac{\delta f}{f'}\right| \tag{1.6}$$

である。よって、

$$|\delta f| \sim \frac{|\delta n|}{n} \sim \frac{10^{-r}}{n} \tag{1.7}$$

である。ところで、

$$n_0(H) := e^{H-\gamma} \tag{1.8}$$

は $n(H)$ の近似解で、$n_0(H) \sim 6 \times 10^{12}$ である。よって、$f(n)$ で $\mathcal{O}(n^{-2})$ の項は無視できる。

以上より、

$$\gamma + \ln n + \frac{1}{2n} = H \tag{1.9}$$

を解けば良いことがわかる。いま、

$$n = e^{\delta} n_0(H) \tag{1.10}$$

と置くと、

$$\delta + \frac{1 - \delta + \mathcal{O}(\delta^2)}{2n_0} = 0, \tag{1.11}$$

$$\delta = -\frac{1}{2n_0} + \mathcal{O}(n_0^{-2}) \tag{1.12}$$

を得るので、

$$n(H) = n_0(H) - \frac{1}{2} + \mathcal{O}(e^{-H}) \tag{1.13}$$

を得る。よって、

$$n(30) = 6000022499692.865\cdots + \mathcal{O}(10^{-13}) \tag{1.14}$$

なので、

$$N(30) = 6000022499693 \tag{1.15}$$

を得る。

論文 [2] によると、3 以上の任意の整数 k に対して、

$$N(k) = \left[e^{k-\gamma} + \frac{1}{2}\right] \tag{1.16}$$

である。$[\bullet]$ はガウス関数である。

A　オイラー・マクローリンの公式

A.1　公式

オイラー・マクローリンの公式は、

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n dx\ f(x) + \frac{1}{2}[f(m)+f(n)] + \sum_{l=1}^{2[\frac{M-1}{2}]} \frac{B_{2l}}{(2l)!}[f^{(2l-1)}(n) - f^{(2l-1)}(m)] + R_M(m,n), \tag{A.1}$$

$$R_M(m,n) = (-1)^{M+1}\int_m^n dx\ \frac{B_M(x-[x])}{M!} f^{(M)}(x) \tag{A.2}$$

である。ここで、$[z]$ はガウス記号 (z を超えない最大の整数) で、B_k はベルヌーイ数で、$B_k(x)$ はベルヌーイ多項式である。$M = 1, 2$ のときは右辺第 3 項の和は 0 とする。ベルヌーイ多項式は、

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!} \quad (0 \le x \le 1) \tag{A.3}$$

で定義され、$B_n = B_n(0)$ である。例えば、$0 \le x \le 1$ で、

$$B_0(x) = 1, \tag{A.4}$$

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \tag{A.5}$$

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6} \tag{A.6}$$

などである。§ A.3 で (A.1) を示す。

A.2　応用

$f(x) = 1/x$, $m = 1$ として、

$$H_n = \ln n + \frac{1}{2}\Bigl(1+\frac{1}{n}\Bigr) + \sum_{l=1}^{M}\frac{B_{2l}}{2l}\Bigl(1-\frac{1}{n^{2l}}\Bigr) + R_{2M+1}(1,n) \tag{A.7}$$

を得る [1]。$n\to\infty$ とすると、

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) = \frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{M}\frac{B_{2l}}{2l} + R_{2M+1}(1,\infty) \tag{A.8}$$

なので、

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{l=1}^{M}\frac{B_{2l}}{2l}\frac{1}{n^{2l}} + R_{2M+1}(1,n) - R_{2M+1}(1,\infty) \tag{A.9}$$

である。最初の数項を見て、誤差項を無視すると、

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{252n^6} + \frac{1}{240n^8} + \cdots \tag{A.10}$$

を得る。

A.3 証明

(A.3) を x で微分すると、

$$t\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} B'_n(x)\frac{t^n}{n!} \tag{A.11}$$

なので、

$$\frac{B'_n(x)}{n!} = \frac{B_{n-1}(x)}{(n-1)!} \quad (n \geq 1) \tag{A.12}$$

を得る。これに $f^{(n-1)}(m+x)$ をかけて積分して、

$$\int_0^1 dx\ \frac{B_{n-1}(x)}{(n-1)!} f^{(n-1)}(m+x) = \Big[B_n(x)\frac{f^{(n-1)}(m+x)}{n!}\Big]_0^1 - \int_0^1 dx\ f^{(n)}(m+x)\frac{B_n(x)}{n!} \tag{A.13}$$

を得る。これを繰り返して、

$$\begin{aligned}\int_0^1 dx\ f(m+x) &= \int_0^1 dx\ f(m+x)B_0(x)\\ &= \Big[\sum_{l=1}^{M}\frac{(-1)^{l-1}B_l(x)}{l!}f^{(l-1)}(m+x)\Big]_0^1 + (-1)^M\int_0^1 dx\ \frac{B_M(x)}{M!}f^{(M)}(m+x)\\ &= \frac{1}{2}[f(m)+f(m+1)] - \sum_{l=2}^{M}\frac{(-1)^l B_l}{l!}[f^{(l-1)}(m+1)-f^{(l-1)}(m)]\\ &\quad -R_M(m,m+1)\end{aligned} \tag{A.14}$$

を得る。よって、

$$\begin{aligned}\int_m^n dx\ f(x) &= \sum_{j=m}^{n-1}\int_0^1 dx\ f(j+x)\\ &= \sum_{k=m+1}^{n-1} f(k) + \frac{1}{2}[f(n)+f(m)] - \sum_{l=2}^{M}\frac{(-1)^l B_l}{l!}[f^{(l-1)}(n)-f^{(l-1)}(m)]\\ &\quad -R_M(m,n)\end{aligned} \tag{A.15}$$

となる。$B_{2p+1} = 0$ $(p = 1, 2, \cdots)$ より、(A.1) を得る。

References

[1] Julian Havil(著), 新妻 弘 (訳)『オイラーの定数 ガンマ：γ で旅する数学の世界』(共立出版, 2009 年).

[2] Krassimir T. Atanassov, "On a conjecture concerning the harmonic series", Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, **7**, 96 (2001).